

06-04 Distributions invariantes

Définition

Soit M la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

Une distribution π telle que $\pi = \pi \times M$ est appelée **distribution invariante** de la chaîne de Markov.

Exemple

Dans l'histoire du chat et de l'armoire, la matrice de transition était $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Cherchons s'il existe une distribution $\pi(x \ y)$ telle que $\pi = \pi \times M$.

Le système $\begin{cases} x = 0,3x + 0,2y \\ y = 0,7x + 0,8y \end{cases}$ a pour solutions tous les couples tels que $0,7x - 0,2y = 0$.

On sait de plus que $x + y = 1$. On en déduit que la distribution π existe et qu'elle vaut $\pi = \left(\frac{2}{9} \quad \frac{7}{9} \right)$.

Propriété

Soit M la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

Sil existe un rang k tel que la matrice M^k ne contient aucun 0 alors la chaîne de Markov admet une distribution invariante et celle-ci est unique.

Remarque

Il existe des chaînes de Markov admettant une infinité de distributions invariantes.

Par exemple, toute distribution est invariante pour la chaîne de Markov de matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit M la matrice de transition associée à une chaîne de Markov de distribution initiale π_0 .

Sil existe un rang k tel que la matrice M^k ne contient aucun 0 alors la suite (π_n) des distributions converge vers l'unique distribution invariante π , indépendamment de la distribution initiale π_0 .

Exemple

Que le chat commence par dormir dans son bac ou sur l'armoire, la probabilité qu'il dorme sur l'armoire dans un grand nombre de jours vaut $\frac{2}{9}$.

06-04 Applications du cours**Application 1**

Soit $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que P est une matrice de transition.
2. Justifier que la chaîne de Markov associée à la matrice P admet une distribution invariante π .
3. Déterminer cette distribution par le calcul.

Application 2

Depuis longtemps, Jean-Yves varie son alimentation et mange chaque jour un plat différent : légumes, burger ou pizza. S'il a mangé une pizza la veille, il choisit un burger avec 80 % de chances. S'il a mangé un burger la veille, il a 90 % de chances de choisir la pizza.

Les jours où Jean-Yves rencontre son cardiologue, déterminer la probabilité qu'il ait mangé des légumes.

Application 3

En 1907, les époux Ehrenfest (Autriche) se penchent sur un paradoxe physique : lorsque deux compartiments A et B communiquent, il est théoriquement possible que le gaz que l'on a mis en A y retourne complètement mais cela ne se produit jamais.

Partie A – Modélisation

Une urne A contient N boules. Une urne B est vide. L'action suivante est répétée : On choisit au hasard une boule dans l'une des deux urnes et on la change d'urne.

1. Écrire un programme en langage Python permettant de connaître, sur 100 expériences, le nombre de tirages nécessaire, en moyenne, pour que le système revienne à l'état initial, avec toutes les boules regroupées en A.

a] cas où $N = 2$

b] cas où $N = 3$

c] cas où $N = 4$

2. Pour quelle valeur de N commence-t-on à rencontrer de réelles difficultés pour revenir à l'état initial ?

Partie B – Le cas $N = 2$

1. Modéliser la situation des urnes à l'aide d'un graphe probabiliste à trois états : A (deux boules en A) ; B (deux boules en B) et C (une boule dans chaque urne). Préciser la matrice de transition associée P et la distribution initiale π_0 .
2. Déterminer l'expression de la distribution après n étapes π_n pour tout entier n .
3. Montrer que la chaîne de Markov admet une distribution invariante π et que celle-ci est la loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

